

# Transformée de Laplace

## Modélisation, système

Pour comprendre, étudier le fonctionnement de nombreux systèmes, il est nécessaire de modéliser leurs comportements, c-a-d de décrire leur fonctionnement avec des principes plus ou moins simples :

Exemples:

- Le niveau de l'eau est proportionnel au temps de remplissage, à débit constant.
- La tension aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la quantité de charge accumulée.
- La population de bactéries croît de 10% par jour.

**Modélisation =>(souvent) équation différentielle**

La traduction mathématique la plus directe est souvent une ou des équations différentielles (équation faisant apparaître les dérivées d'une fonction que l'on cherche).

Exemple de la croissance d'une population  $y(t)$  :

Equation différentielle :  $dy/y = y'(t) = 0.1 t$ , la solution est  $y(t) = y_0 \exp(0.1 t)$

Intégrer une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

Lorsqu'une équation se présente sous la forme d'une somme de ses dérivées multipliées par des coefficients dépendant ou non de la variable dite indépendante (x ou t), l'équation différentielle est dite linéaire.

Ex :  $5 y'' - 3t y = 5 + 2 t$

Elle n'est pas linéaire si apparaissent des produits ou des élévations à une puissance de la fonction inconnue.

## Système, système linéaire, système causal

On peut souvent schématiser le comportement d'un ensemble (dit système) en distinguant, une entrée  $e(t)$  (ou stimulus, ou excitation ...), un système qui transforme cette entrée en une sortie  $s(t)$  (ou réponse) que l'on cherche.

On considérera essentiellement  $t$  (temps) comme variable indépendante, les fonctions  $e(t)$  et  $s(t)$  sont dites signal d'entrée, signal de sortie dans ce cas.

Exemple : Une tension électrique (excitation) est appliquée au bobinage d'un haut-parleur dont la membrane va vibrer et créer une pression acoustique, la sortie inconnue est le déplacement de la membrane.

Exemple: Un bassin est en communication avec la mer et ses variations de niveaux: les vagues (entrée) par l'intermédiaire d'un tuyau (correspondant à la résistance de l'exemple précédent), La fonction sortie est la fonction niveau du bassin dépendant du temps.

Exemple analogue: Une tension  $e(t)$  variant dans le temps, est injectée dans un circuit résistance-capacité. La sortie est la tension aux bornes du condensateur.

Système linéaire: Si deux causes  $e_1$  et  $e_2$ , qui produisent indépendamment deux effets  $s_1$  et  $s_2$ , et si appliquées simultanément, elles produisent comme effet la somme des deux effets, le système est dit linéaire : le principe de **superposition** est applicable, l'équation différentielle linéaire correspondante est dite linéaire.

Système **causal**: Lorsque  $s(t_1)$  ne dépend pas de  $e(t_2)$  si  $t_2 > t_1$ , le système est dit causal ( $e(t)$  est la cause).

## Calcul symbolique

On peut résoudre (pas toujours !) les équations différentielles grâce aux mathématiques (changement de variables, résolution de l'équation homogène, équation caractéristique ...), on peut aussi les résoudre numériquement grâce à l'ordinateur : On calcule dans une boucle, à la fin de chaque pas de temps  $dt$ , une nouvelle valeur de la fonction inconnue:

Exemple :  $y'(t) = k * y(t)$  avec condition initiale  $y(0) = y_0$ .

$$dy/dt = k \cdot y(t) \text{ ou } dy = y(t+dt) - y(t) \Rightarrow y(t+dt) = y(t) + k \cdot dt$$

Si dt est choisi petit, la suite de valeurs y(t) est proche de la vraie solution. Cette méthode (dite « Euler explicite ») connaît beaucoup de variantes améliorant la précision.

Enfin dans le cas des **systèmes linéaires**, et seulement dans ce cas, au lieu de résoudre les équations différentielles avec les méthodes traditionnelles on peut faire appel au calcul symbolique, essentiellement la transformée de Laplace développé par Heaviside pour le calcul de circuits électriques. Un gros avantage est la prise en compte des discontinuités (le « saut de Heaviside »), qui en mathématiques traditionnelles sont difficiles à gérer.

Exemple d'un calcul utilisant une transformation (qui n'est pas celle de Laplace):

Soit à calculer  $z = x \cdot y$ , en supposant la multiplication une opération difficile !

Résolution directe :  $z = x \cdot y$  en utilisant les méthodes (compliquées !) de la multiplication

Résolution par transformée :  $X = \ln(x)$ ,  $Y = \ln(y)$  puis  $Z = X + Y$  puis  $z = \exp(Z)$ . On utilise des tables pour les transformations directes et inverse et l'on suppose l'addition bien plus facile (!).

## Definition de la transformée de Laplace

Soit  $f(t)$ , une fonction de  $t$  définie pour  $t \geq 0$ , la transformée de Laplace notée  $F(p)$  ou  $\mathcal{L}$  (Lcursif) de  $f(t)$  est égale à :

$$F(p) = \text{Laplace}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (\text{Somme de } 0 \text{ à l'infini de } \exp(-pt) \cdot f(t) \cdot dt), \text{ soit somme des valeurs de la fonction pondérées par } \exp(-pt).$$

$p$  est a priori une variable complexe. Elle est à comparer au ' $j\omega$ ' de la transformée de Fourier très proche.

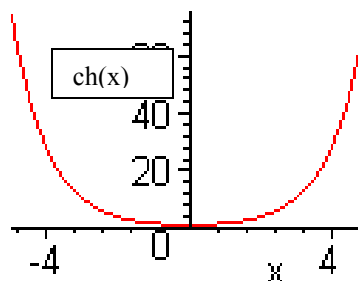
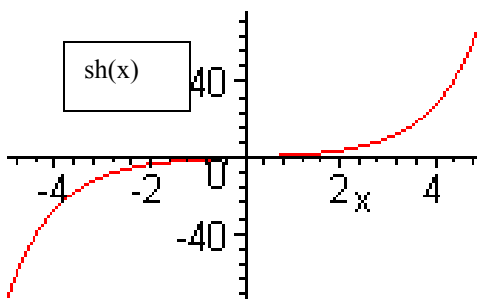
La transformée existe si l'intégrale converge pour certaines valeurs de  $p$ , en général  $p >$  une valeur  $a$ .

## Transformée de quelques "signaux élémentaires"

(signal = fonction du temps en électronique, souvent une tension repérée par rapport à la masse).

On peut facilement les calculer grâce à l'intégrale de définition (cf supra), par exemple, l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  (largeur  $\epsilon$ , hauteur  $1/\epsilon$ , aire 1) a pour transformée de Laplace  $= 1$

Impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1	
Echelon unité (=Heaviside( $t-0$ ))	1	$1/p$	$p > 0$
Rampe	$t$	$1/p^2$	$p > 0$
Puissance de $t$	$t^n$	$n!/p^{n+1}$	$p > 0$
Exponentielle $t > 0$	$\exp(at)$	$1/(p-a)$	$p > a$
Sinus	$\sin(at)$	$a/(p^2 + a^2)$	$p > a$
Cosinus	$\cos(at)$	$p/(p^2 + a^2)$	$p > a$
Sinus hyperbolique	$\text{sh}(at) = (e^{at} - e^{-at})/2$	$a/(p^2 - a^2)$	$p > a$
Cos hyperbolique	$\text{ch}(at) = (e^{at} + e^{-at})/2$	$p/(p^2 - a^2)$	$p > a$



## Fonctions continues par morceaux

Une fonction est dite continue par morceaux dans un intervalle  $[a, b]$  si cet intervalle peut être divisé en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction continue et possède des limites finies à droite et à gauche.

### Fonction d'ordre exponentiel (pour conditions mathématiques d'existence de la transformée de Laplace)

S'il existe un majorant  $M > 0$  pour  $|\exp(-g t) f(t)| < M$ , pour tout  $t > t_0$ , la fonction est dite exponentielle d'ordre  $g$ . Ce type de fonction ne croit pas plus vite que  $M \exp(g t)$

Exemple :  $f(t) = t^2$  est exponentiel d'ordre 3 par exemple parce que  $\exp(-3t) t^2 < 1$  pour tout  $t > 0$ , en revanche,  $\exp(t^3)$  ne l'est pas car  $\exp(-g t) \cdot \exp(t^3) = \exp(-g t + t^3)$  ne peut pas être borné quand  $t$  tend vers l'infini.

La transformée de Laplace existe pour toute fonction continue par morceaux jusqu'à une valeur  $t$  et d'ordre exponentiel pour  $t > t$ .

Les transformées peuvent exister pour d'autres fonctions ( $L[f(t)=t^{1/2}] = \text{racine}(\pi/p)$ ), il ne s'agit ici que de conditions suffisantes.

## Propriétés

\* linéarité

$$\text{Laplace}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 * \text{Laplace}(f_1(t)) + c_2 * \text{Laplace}(f_2(t))$$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes quelconques. Le symbole Laplace ou  $L$  cursif est souvent appelé opérateur de Laplace. Cet opérateur lui-même est linéaire (principe de superposition applicable).

\* Translation

$$\text{Si } \text{Laplace}(f(t)) = F(p),$$

=> Translation sur variable de Laplace :

$$\text{Laplace}(\exp(at) * f(t)) = F(p-a)$$

=> Translation temporelle :

$$\text{Laplace}(g(t) = f(t-a) \text{ si } t > a, \text{ sinon } 0) = \exp(-ap) * F(p)$$

=> Changement d'échelle :

$$\text{Laplace}(f(a*t)) = 1/a * F(p/a)$$

\* Dérivation et intégration :

Dérivées :

$$\text{Laplace}(f'(t)) = p F(p) - f(0)$$

Ceci explique l'utilisation de Laplace pour la résolution d'équation différentielle, dans les problèmes à valeurs initiales tels que les problèmes temporels = situation connue au départ, on cherche à prédire l'évolution.

Si la fonction n'est pas continue en  $t=a$  (saut au point de discontinuité : deux valeurs de  $f(t)$  pour  $a+$  et  $a-$ ) :

$$\text{Laplace}(f'(t)) = p F(p) - f(0) - \exp(-ap)(f(a+) - f(a-))$$

$$\text{Dérivée seconde : } \text{Laplace}(f''(t)) = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$\text{Dérivée } n^{\text{ième}} : \text{Laplace}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\text{Intégrale (primitive) : } \text{Laplace}\left(\int_0^{\infty} f(t) \cdot dt\right) = F(p)/p$$

\* Divers

Multiplication par  $t^n$  :

$$\text{Laplace}(t^n * f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

Division par  $t$  :

$$\text{Laplace}(f(t)/t) = \int_0^{\infty} F(p) \cdot dp$$

Fonction périodique :  $(f(t+T) = f(t))$

$$\text{Laplace}(f(t)) = \frac{\left(\int_0^T f(t) \cdot dt\right)}{(1 - \exp(-pT))} \quad (\text{demonstration: suite géométrique de raison } \exp(-pT))$$

Valeurs remarquables :

$$\limite(F(p), p \rightarrow \text{infini}) = 0$$

valeur initiale :

$$\limite(f(t), t \rightarrow 0) = \limite(p F(p), p \rightarrow \text{infini})$$

valeur finale :

$$\limite(f(t), t \rightarrow \text{infini}) = \limite(p F(p), p \rightarrow 0)$$

équivalences de fonctions :

Si  $\limite(f(t)/g(t), t \rightarrow 0 \text{ ou } \text{l'infini}) = 1$ , les fonctions sont équivalentes ( $f(t) \sim g(t)$ ) pour  $t=0, \text{ infini}$ . Dans ce cas, si  $f(t) \sim g(t)$  pour  $t > 0$ ,  $F(p) \sim G(p)$  pour  $p \rightarrow \text{infini}$

## Méthodes de calcul :

- Méthode directe à partir de la définition (intégrale).

- Application de la linéarité: Le signal est décomposé en somme :

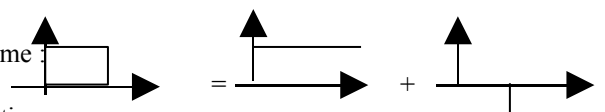
Exemple :  $L$ .Laplace(créneau):  $f(t) = u(t) - u(t-\tau) \Rightarrow 1/p - \exp(-\tau)/p$

- Méthode via un développement en puissance de  $t$  de la fonction:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \Rightarrow F(p) = a_0/p + a_1/p^2 + \dots$$

- Méthode via les équations différentielles:

Laplace( $\exp(at)$ )?



$y = \exp(at)$  est solution de l'équation différentielle  $y' = ay$ . L'équation algébrique avec variable de Laplace est :  $pY(p) - y(0) = a Y(p)$  soit  $Y(p)(p-a) = y(0)$  soit  $Y(p) = 1/(p-a)$  (Equation obtenue

- Dérivation par rapport à un paramètre (difficile !):

Laplace( $\sin(t)/t$ ) ?

$$d(1/t * \sin(at)/da) = \cos(at) \text{ or } \mathcal{L}[\cos(at)] = p/(p^2 + a^2), \text{ donc } F(p) = \int_0^a \frac{p \cdot du}{p^2 + u^2} = a \arctan(a/p)$$

## Transformée inverse de Laplace

### Introduction:

Si  $\text{Lapl}(f(t)) = F(p)$  alors  $f(t) = \text{invLaplace}(F(p))$

ex.:  $\text{Lapl}[\exp(-3t)] = 1/(p+3)$  donc  $\text{invLaplace}[1/(p+3)] = \exp(-3t)$

Nota:

Toute fonction nulle partout sauf en un nombre limité de points (relation biunivoque avec les entiers) est dite fonction zéro. Elle a pour transformée de Laplace 0.

Puisque la transformée d'une fonction zéro est nulle, ma transformée inverse est définie à une fonction zéro près que l'on peut rajouter. En toute rigueur, la transformée inverse n'est pas unique. ERn fait, sauf cas explicite, ces fonctions zéros n'ont pas d'intérêt physique et ne sont pas prise en compte.

Il existe une formule pour calculer la transformée inverse à base d'intégration dans le plan complexe (bonnes connaissances mathématiques exigées!!).

Les tables de transformées inconnues + les propriétés sont les outils essentiels pour inverser la transformée de Laplace.

### Propriétés:

Elles sont évidemment les homologues de la transformation directe :

Linéarité:

$$\text{invLaplace} \{ 4/(p-2) - 3p/(p^2+16) + 5/(p^2 + 4) \} = 4 \exp(-2t) - 3 \cos(4t) + 5/2 \sin(2t)$$

Translation

Retard :

$$\text{invLaplace} \{ \exp(-ap) F(p) \} = f(t-a)$$

Echelle :

$$\text{invLaplace} \{ pF(k p) \} = 1/k f(t/k)$$

Dérivée

Intégrale

Multiplication par  $p^n$

Division par  $p$ :

Théorème de la convolution

Voir ci-dessous la convolution. L'expression à traiter est considérée comme un produit de transformées, la transformée inverse est alors l'intégrale de convolution

$$\text{invLaplace} \{ 1/(p-2) * 1/(p-1) \} = \int_0^t \exp(2u) * \exp(t-u) du = \exp(2t) - \exp(t)$$

### Méthodes de calcul de la transformée inverse

- Tables des fonctions connues et propriétés, linéarité, dérivations etc..

$$\text{Exemple : } F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{3p+7}{(p-1)^2} = \frac{3(p-1)+10}{(p-1)^2-4}$$

$$F(p) = 3 \frac{p-1}{(p-1)^2-4} + 10 \frac{1}{(p-1)^2-4}$$

$$f(t) = 3 \exp(t) \text{ch}(2t) + 5 \exp(t) \text{sh}(2t) = 4 \exp(3t) - \exp(-t)$$

Séries en  $(1/p)^n$

- Equation différentielle (même remarque que pour leur usage dans la transformée directe).
- Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles (= quotient de deux polynômes):

Les transformées de Laplace apparaissant comme résultats de calcul (Transformée de la sortie d'un système linéaire), sont souvent de la forme quotient de polynômes.

Un polynôme peut être décomposé en un produit de polynômes plus simples du premier degré et du second degré. Le quotient de polynôme peut souvent être transformé (décomposition en éléments simples) en expressions du type  $A/(p+a)$  et  $(Bp+C)/(p^2 + b*p + c)$  dans lesquelles on reconnaît la transformée d'exponentielles et de sinus/cos/sh/ch. .

Restent à déterminer les constantes A, B, C par identification (=égalité quelque soit p des expressions brutes et transformées), plusieurs méthodes:

- Réduction au même dénominateur et identifications des termes du numérateur de même degré en p:

Ex.:  $Q(p) = (3p + 7)/(p^2 - 2p - 3)$  Le dénominateur peut s'écrire :  $(p-3)(p+1)$

$$Q(p) = A/(p-3) + B/(p+1) = A(p+1)/(p-3) + B(p-1)/(p+1) = \frac{A(p+1) + B(p-3)}{p^2 - 2p - 3}$$

Deux équations :  $A+B=3$  (termes en p) et  $A - 3B = 7$  (termes en  $p^0$ ) =>  $A=4$  et  $B = -1$

- Limites lorsque p tend vers les pôles (racines du dénominateur=valeurs de p qui rendent infini le quotient):

Pour chaque élément, on multiplie les membres à identifier par le dénominateur concerné (pour annuler l'effet du pôle), et l'on fait tendre p vers le pôle concerné (celui qui annule le dénominateur), le calcul des limites donnent les constantes A, B, C. On répète l'opération pour les différents pôles.

$$\lim_{p \rightarrow 3} \left\{ \frac{3p+7}{p+1} \right\} = A + \lim_{p \rightarrow 3} \left\{ B \frac{(p-3)}{(p+1)} \right\} \Rightarrow A=4$$

$$\lim_{p \rightarrow -1} \left\{ \frac{3p+7}{p-3} \right\} = B + \lim_{p \rightarrow -1} \left\{ A \frac{(p+1)}{(p-3)} \right\} \Rightarrow B = -1$$

Autres méthodes : Dérivation par rapport à un paramètre neutre (analogue à la méthode homologue du calcul de la transformée directe).

Intégration dans le plan complexe (pour experts en Mathématiques!):

$$f(t) = \frac{\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(-pt) F(p) \cdot dp}{2\pi}$$

## Convolution

### Introduction :

Convolution = [évolution (=variation en fonction du temps)] combinée.

Le passage par la transformée de Laplace, et son inverse, permet de résoudre des équations différentielles régissant le comportement de systèmes physiques qui « traitent » une entrée en fournissant une « réponse » (sortie).

Elle permet aussi de prendre en compte des fonctions continues par morceaux (exemple: "saut de Heaviside"), ce que les mathématiques traditionnelles prennent mal en compte. Ceci est très utile dans les systèmes où l'on injecte des signaux à transitions rapides tels que ceux qu'on rencontre en électronique (tension en créneaux, et où l'on cherche une sortie modifiée par le système ('filtrée')).

Un grand domaine d'application de la transformée de Laplace, est la convolution appliquée au système c'est à dire le calcul de la sortie  $s(t)$  en fonction de l'entrée et d'une caractéristique du système : la « réponse impulsionnelle ».

#### Premier temps :

On applique une impulsion de Dirac à l'instant  $t=0$ , on obtient en sortie un signal  $h(t)$ , dit réponse impulsionnelle. Cette réponse caractérise le système.

**Deuxième temps:** On applique un signal quelconque  $e(t)$  au même système, la sortie  $s(t)$  du système est la 'convolution' ou le 'produit de convolution' de  $h(t)$  par  $s(t) = h(t) \otimes e(t)$ .

Comme la transformée d'un produit de convolution est le produit (usuel) des transformées de Laplace :  $S(p) = H(p) \times E(p)$ , il sera souvent plus facile de calculer la transformée du produit de convolution c-a-d la transformée de la sortie du système.

On effectue alors la transformée inverse pour retrouver le signal de sortie  $s(t)$ .

### Définition du produit de convolution:

$$s(t) = h(t) \otimes e(t) = \int_0^t e(u) \cdot h(t-u) \cdot du = \int_0^t e(t-u) \cdot h(u) \cdot du$$

Explication : on peut considérer hardiment l'entrée  $e(t)$  comme une succession d'impulsions aux instants  $\tau$  d'amplitudes égales à  $e(\tau)$ . Chacune génère en sortie du système des réponses impulsionnelles retardées  $h(t-\tau)$  d'amplitudes proportionnelles aux entrées correspondantes.

En sortie, superposition oblige, on aura à l'instant  $t$ , l'addition (signification primaire de l'intégrale) des réponses impulsionnelles  $h(t-\tau)$  (réponses impulsionnelles retardées de  $\tau$ ) dans l'état où elles sont à l'instant  $t$ .

On peut aussi considérer à l'instant  $t$ , les différents états de la réponse impulsionnelle  $h(\tau)$  pondérée par l'amplitude de l'impulsion qui lui a donné naissance  $e(t-\tau)$ .

**Remarques :**

Le produit est symétrique en  $e(t)$  et  $h(t)$ .

Le système doit être linéaire pour que la superposition s'applique : donc pas d'effet de saturation ou de caractéristique entrée-sortie quadratique ou polynomiales, exponentielles ...

Outre les nombreux exemples en électronique on peut analyser l'expérience suivante :

On déverse en une fraction de seconde un seau rempli d'un colorant dans un torrent (!). On relève en aval (section de prélèvement) la courbe de concentration en fonction du temps de ce colorant (réponse impulsionnelle=étalement de l'impulsion): les particules n'arrivent pas toutes en même temps : particules rapides, particules moyennes (classiquement les plus nombreuses) et particules lentes et très lentes. (particules flânantes).

Si maintenant on injecte en plusieurs fois à des instants séparés, avec des seaux de capacités différentes, on récupérera à l'instant  $t$  des particules rapides qui viennent d'être injectées, des particules moyennes provenant des seaux intermédiaires, et des particules lentes des premiers seaux.

