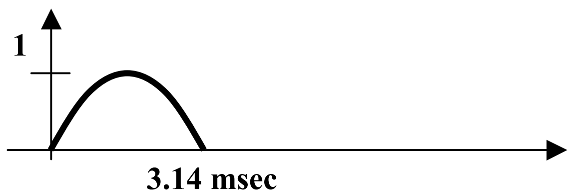
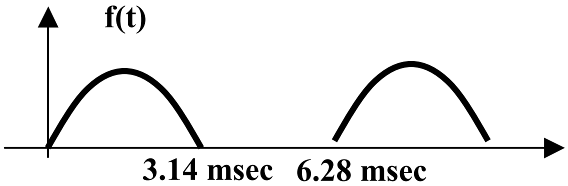
TD LAPLACE (#2) – YM- JANVIER 2003

Soit le signal e(t):





1) **Trouver une représentation trigonométrique et une représentation polynomiale du signal e(t).**
2) **Calculer I=E(p) (transformée de Laplace de e(t) en formulation trigonométrique) par l'intégrale de définition. On pourra intégrer deux fois par parties pour retrouver I.**
3) **Calculer E(p) en tant que transformée d'une somme ou d'une différence de signaux connus.**
4) **Donner la transformée de Laplace du signal f(t) (deux arches).**
5) **Donner la transformée de Laplace du signal g(t) (n arches).**
6) **Calculer E(p) transformée de e(t) exprimé en formulation polynomiale.**

Corrigé :

1) Exercice de reconnaissance des formes (compétence utile à acquérir): Pour $t>0$ et $t<\pi$, on retrouve la première alternance d'une sinusoïde de période 2π (temps exprimé en msec) : maximum =1 pour $t=\pi/2$, pente de 1 pour $t=0$ …=> $e(t)=\sin(t)$ pour t € $[0,\pi]$, $e(t)=0$ sinon

Plus difficile : Cette arche peut être représenté pour $t>0$ et $t<\pi$, par une parabole (polynôme du second degré) : centré en $\pi/2$, donc de la forme $e(t)= a*(t-\pi/2)^2$, pour $t=\pi/2$, maximum de 1 => rajouter 1, soit $f(t)= a*(t-\pi/2)^2 +1$,
et l'on doit avoir $e(0)=a*(0-\pi/2)^2+1= 0$ => $a= - 4/\pi^2$
Les deux formes ne sont identiques qu'approximativement

2) Transformée de Laplace du signal e(t) :

$$E(p)=I=\int_0^\infty e(t).\exp(-pt).dt =\int_0^\pi \sin(t).\exp(-pt).dt .$$

Après une intégration par partie (selon suggestion):

$$I = [-\sin(t).\exp(-pt)/p] + 1/p \int_0^\pi \cos(t).\exp(-pt).dt$$

. Puis une deuxième intégration par partie pour l'intégrale qui reste (1er terme nul):

$$I = [-\cos(t).\exp(-pt)/p^2] -1/p^2 \int_0^\pi \sin(t).\exp(-pt).dt = (\exp(-p\pi)+1))/p^2 - I/p^2$$

En regroupant: $I (1+1/p^2)=I(p^2+1)/p^2 = (\exp(-p\pi)+1))/p^2$ => $E(p)=1/(p^2-1)*((\exp(-p\pi)+1))$

3) Transformée à partir de composantes simples:
La transformée de Laplace de sin(t) à partir de t=0 est connue $(1/(p^2+1))$
E(t) est la somme d'une sinusoide et d'une sinusoïde décalée de π inversée (au sens électronique), donc : $E(p)= 1/(p^2+1) * (1+\exp(-p\pi))$.

4) Transformée d'une somme = somme des transformées :
$F(p) = E(p)+\exp(-2p\pi)*E(p) = 1/(p^2+1) (1+\exp(-p\pi) +\exp(-2p\pi)+\exp(-3p\pi))$.

5) $G(p) = 1/(p^2+1)\,(1+\exp(-p\pi)+\exp(-2p\pi)+\exp(-3p\pi)+ \ldots +\exp(-(2*n-1)\,p\pi)+\exp(-2np\pi))$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison (raison=ratio=rapport) $\exp(-p\pi)$,
$G(p)= 1/(p^2+1)\ \Sigma \exp(-kp\pi)$ [k variant de 0 à 2n]

$$G(p) = 1/(p^2+1)\ \frac{1 - \exp(-p\pi)^{2n+1}}{1-\exp(p\pi)}$$

6) Transformée de $t^2 = 2/p^3$, donc après décalage temporel de $\pi/2$, et application de la linéarité :

$E(p) = -4/\pi^2 *2/p^3 \exp(-p\pi/2) +1/p$