Analyse de Fourier : Transformée de F.

I Introduction

Jean-Baptiste Joseph Fourier 1768-1830

L'analyse de Fourier a pour but de détecter à l'intérieur d'un signal, l'absence ou la présence plus ou moins importante d'un signal de référence : la sinusoïde. La sinusoïde (ou la cosinusoïde) est un signal de référence qui traduit la vitesse de variation d'une grandeur physique. Un signal est composé de vibrations plus ou moins rapides que l'analyse de Fourier détecte.

A un signal défini en fonction du temps, correspond une représentation « spectrale » qui affiche son contenu en termes de fréquence. En optique, le terme spectre est la composition d'un faisceau lumineux en termes de couleurs or la couleur correspond à une fréquence de vibration d'un rayonnement électro-magnétique.

L'analyse d'un signal **périodique** conduit à un spectre de raies : les harmoniques, c'était l'objet de la décomposition en série de Fourier[1], lorsque le signal n'est plus périodique, le spectre est continu.

La synthèse (opération inverse de l'analyse) consiste à fabriquer un signal en ajoutant des composantes de bases sinusoïdales.

II Définitions de la transformée et de la transformée inverse

L'expression des séries de Fourier est étendue aux signaux non périodiques. Soit un signal y(t). On définit sa transformée de Fourier $Y(\omega) = F_{cursif}(y(t))$: ω est la fréquence angulaire = $2\pi f$

$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j\,\omega\, t)\, dt$ avec $\exp(-j\,\omega\, t) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega\, t)$ [j imaginaire unité: $j^2=-1$]. La fonction est complexe même si y(t) est réel=> deux valeurs (partie réelle et partie imaginaire) pour chaque valeur de ω. Chaque couple de valeurs peut être remplacé (cf ci-dessous) par deux coefficients : amplitudes d'un cosinus et d'un sinus, ou encore par un module (= $\sqrt[2]{\text{réel}^2+\text{imag}^2}$) et un argument = arctan(Im/Re). On peut alors noter la transformée $Y(\omega) = |Y(\omega)| \exp(j\phi(\omega))$.

Nota: Pour la cohérence mathématique, on considère des fréquences ω positives et négatives : les valeurs pour ω et $-\omega$ sont néanmoins reliées par des symétries (cf ci-dessous), si y(t) est réel.

On définit aussi la transformée inverse de Fourier $y(t) = \text{Fourier}^{-1}(Y(\omega))$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \exp(j\,\omega\, t)\, d\omega$$

A partir du signal y(t), on peut calculer le **spectre** $Y(\omega)$. A partir du spectre on peut reconstituer le signal y(t). Il s'agit de deux représentations (**temporelle** et **fréquentielle**) de la même chose.

[1] http://www.cem2.univ-montp2.fr/~moreau/jFourier/

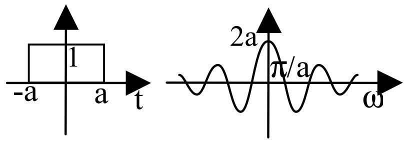
Nota: Il existe une variante où les deux transformées (directes et inverses) sont symétriques avec chacune un multiplicateur avant l'intégrale égal à $1/\sqrt{2\pi}$

Nota 2 : Une autre variante, symétrique, est la transformée de Fourier avec f (en Hz) comme variable fréquentielle :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, \exp(-\, j\, 2\, \pi\, f\, t)\, dt \qquad \text{et} \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\, \exp(j\, 2\, \pi\, f\, t)\, df$$

Exemple : Soit un signal rectangulaire: y(t)=rect(a) ou y(t)= 1 si –a <t <a, sinon nul.

$$Y(\omega) = \int_{-a}^{a} \exp(-j\, \omega\, t)dt = \frac{\exp(j\, \omega\, a) - \exp(-j\, \omega a)}{j\omega} = \frac{2*\sin(\omega a)}{\omega}$$



Interprétation : Les variations rapides du signal si elles existent se traduisent par des valeurs importantes dans le spectre (la transformée de Fourier) du côté des fréquences élevées ...

L'intérêt (très important) est que les systèmes physiques dans lesquels on injecte les signaux ne "répondent" pas de la même façon lorsque la fréquence varie[2] . On peut aussi transformer un signal de façon à décaler dans un sens ou dans l'autre le spectre de fréquence : modulations – démodulations.

III Transformées de Fourier d'un signal et symétries

III.A Symétries de l'amplitude et de la phase d'un spectre d'un signal réel

Si le signal est réel, le spectre est pair pour sa partie réelle : $Y(\omega)= \int_{-\infty}^{\infty} y(t).\cos(\omega t).dt$ et impair pour sa partie imaginaire $- j \int_{-\infty}^{\infty} y(t).\sin(\omega t).dt$

On peut écrire la transformée sous la forme $Y(\omega) = |Y(\omega)| \exp(j\phi(\omega))$. Cette notation fait apparaître le module (ou l'amplitude), et l'argument (ou la phase).

Si y(t) est réel (99% des signaux approchés), on montre que :

$Y(-\omega)=Y^*(\omega)= |Y(\omega)| \exp(-j\phi(\omega))$, soit $|Y(-\omega)|=|Y^*(\omega)|$ et $\phi(-\omega) = - \phi(\omega)$. [Y^* est le conjugué de Y]

Le spectre d'amplitude $|Y(\omega)|$ est donc de symétrie paire (symétrique par rapport à l'axe Oy) tandis que le spectre de phase $\phi(-\omega)$ est de symétrie impaire (symétrique par rapport à l'origine). L'ensemble de ces deux fonctions constitue le spectre en fréquence de y(t).

III.B Parties réelles et imaginaires, parités (signal réel):

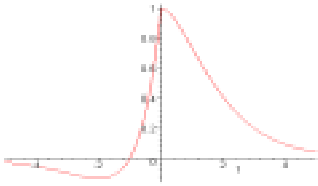
On peut identifier les parties réelles et imaginaire d'une part avec les partie paires et impaires et d'autre part avec les parties cosinusoidales et sinusoidales:

---

[2] voir par exemple http://www.cem2.univ-montp2.fr/~moreau/machine/

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t).\cos(\omega t).dt\ - j\int_{-\infty}^{\infty} y(t).\sin(\omega t).dt\ = \text{Yréel}\,(\omega) + j\text{Y imag}(\omega) = \text{Y pair}(\omega) + j\text{Y impair}(\omega)$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty} y(t).\cos(\omega t).dt = \int_{-\infty}^{\infty} y_{pair}(t).\cos(\omega t).dt$ et $\int_{-\infty}^{\infty} y(t).\sin(\omega t).dt = \int_{-\infty}^{\infty} y_{impair}(t).\cos(\omega t).dt$



Exemple : $y(t) = \exp(-|t|) + t^* \exp(-|t|) = y_{pair}(t) + y_{impair}(t)$

$Ypair(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t).\cos(\omega t).dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|t|).\cos(\omega t).dt = \frac{2}{1+\omega^2}$:expression paire

$Yimpair(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} y(t).\sin(\omega t).dt = -\int_{-\infty}^{\infty} t^*\exp(-|t|).\sin(\omega t).dt = -\frac{4\,\omega}{(1+\omega^2)^2}$:expression impaire

$Y(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} - 4\frac{j\,\omega}{(1+\omega^2)^2}$ par le calcul direct ou en ajoutant les deux parties.

Si le signal est pair, le spectre est réel.

Si le signal est impair, le spectre est imaginaire.

Expérimenter les symétries sur :

http://sepwww.stanford.edu/oldsep/hale/FftLab.html

Une intégrale du type $\int_{-\infty}^{\infty} y(t).f(\omega,t).dt$ donne une valeur (dépendante de ω) qui est d'autant plus grande que y(t) "ressemble" à f(ω,t) . La dernière expression donne donc l'importance dans y(t) de chaque composante cos et sin pour chaque fréquence (angulaire) ω. Les composantes importantes seront celles à conserver pour une restitution du signal lorsqu'on ne désire pas tout conserver: application dans les compressions JPEG ou MP3 (voir ci-dessous)

III.C Etendue spectrale : aspect qualitatif

Si l'étendue temporelle physique d'un signal f(t) est de Δt (durée pendant laquelle f(t) n'est pas négligeable), l'étendue de son spectre est très approximativement Δω tel que Δt*Δω est proche de l'unité: Au signal rectangulaire ci-dessus de largeur 2a, est associé un spectre dont l'amplitude n'est pas négligeable entre -2π/a et +2π/a, si a croit Δt croît et Δω décroit.

IV Propriétés

On notera : y(t) <-> Y(ω) pour désigner la paire de transformées de Fourier (directe et inverse).
Linéarité : a1*y1(t) +a2* y2(t) <-> a1*Y1(ω) + a2*Y2(ω) a1 et a2 sont des constantes
Décalage temporel : y(t-τ) <-> exp(-j ω τ)Y(ω)

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(u).\exp(-j\ \omega\ (u+\tau)).du$$

Décalage fréquentiel : $y(t)^*\exp(j\ \omega_o\ t) \leftrightarrow Y(\omega-\omega_o))$
Changement d'échelle : y(a*t)=1/|a|*Y(ω/a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(u).\exp(-j\ \omega\ u/a).du/a\ = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} y(u).\exp(-j\ \omega/a\ u).du$$

Inversion du temps : $y(-t)$ <-> $Y(-\omega)$

Dualité : $Y(t)$ <-> $2*\pi\ y(-\omega)$ (Les allures des spectres et des signaux sont interchangeables !)

Exemple : Si le spectre est rectangulaire, le signal est en sinus cardinal et vice versa.

Différentiation : $y'(t) = dy(t)/dt$ <-> $j\ \omega\ Y(\omega)$

Différentiation du spectre : $(-\ j\ t)\ y(t)$ <-> $Y'(\omega) = dY(\omega)/d\omega$

Intégration : $\int_{-\infty}^{t} y(u)\ du$ <-> $\frac{1}{j\ \omega} Y(\omega) + \pi\ Y(0).\delta(\omega)$ [$\delta(\omega)$: impulsion de Dirac => raie en $\omega=0$]

Si le signal est périodique, le spectre présente des valeurs infinies.

Si le signal est échantillonné (données numériques), le spectre est périodique sur l'axe des fréquences (cf. paragraphe Echantillonnage).

V Quelques transformées :

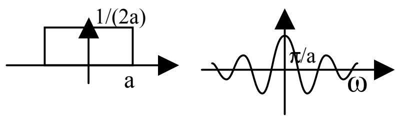
Impulsion de Dirac en t=0 : $\delta(t)$ <-> 1 ; impulsion en t= t_o : $\delta(t-to)$ <-> $\exp(-j\ \omega t_o)$

Signal constant unité: 1 <-> $2\ \pi\ \delta(\omega)$, en f : $\delta(f)$

Signal échelon : $u(t)$ <-> $\pi\ \delta(\omega) - j/\omega$, en f : $\frac{1}{2}\ (\delta(f) - j/(\pi f))$

exponentielle décroissante (a>0), à partir de t=0: $\exp(-at) * u(t)$ <-> $\frac{1}{a+j\omega}$

double exponentielle décroissante (a>0): $\exp(-a\ |t|)$ <-> $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$



signal rectangulaire : $1/(2a) *\ \mathrm{rect}(a)$ <-> $\frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$ ("sinus cardinal")

$\cos(\omega o\ t)$ <-> $\pi\ \delta(\omega - \omega o) + \pi\ \delta(\omega + \omega o)$ ou en f : $\frac{1}{2}\ \delta(f - fo) + \frac{1}{2}\ \delta(f + fo)$

[Signal périodique => raies de hauteur infinie mais d'aire finie]

$\sin(\omega o\ t)$ <-> $-\ j\ \pi\ \delta(\omega - \omega o) + j\ \pi\ \delta(\omega + \omega o)$ ou en f : $\frac{1}{2}\ j\ \delta(f + fo) - \frac{1}{2}\ j\ \ \delta(f - fo)$

Courbe de Gauss ("cloche") $\exp(-t^2/2)$ <-> $\sqrt{2\pi}\ \ \exp(-\omega^2/2)$ [spectre de même allure que le signal]

Plus général : $\exp(-\ t^2/a)$ <-> $\sqrt{a\ \pi}\ \ \exp(-\ a\ \pi^2 f^2)$

VI Intérêt de la transformée de Fourier

Les dispositifs physiques agissent souvent en filtres, en électronique par exemple : la réaction dépend beaucoup de la vitesse de variation de l'excitation (exemple une membrane de haut-parleur suit plus facilement les variations lentes (graves) que les variations rapides (aïgus) d'un signal électrique : connaissant le spectre de l'entrée, on peut évaluer la réaction si l'on connaît le filtre (sa « fonction de transfert »). On peut aussi synthétiser un signal qui passe dans un filtre donné (ADSL).

Les fonctions sinus et cosinus se dérivent facilement, les traitements mathématiques sont donc plus faciles sur les spectres que sur le signal lui-même.

Le signal décomposé laisse souvent apparaître des composantes fréquentielles d'amplitudes très inégales. En ne conservant que les composantes essentielles, on peut reconstituer le signal sans trop d'erreurs avec très peu de composantes. Application en compression[3].

---

[3] http://www.cem2.univ-montp2.fr/~moreau/wavelet/

VII De la décomposition en séries à la transformée

Quand un signal est périodique de période T, on peut le considérer comme la somme d'une composante continue et de cosinusoïdes et sinusoïdes de période T(fondamental= $2\pi/\Omega$), 2T, 3T, 4T ...(harmoniques) chacune ayant une amplitude propre : les coefficients de Fourier.

Pour chaque fréquence de l'harmonique de rang k (de fréquence k*fréquence du fondamental), on peut alternativement donner :

- les amplitudes de la fonction cosinus et de la fonction sinus,

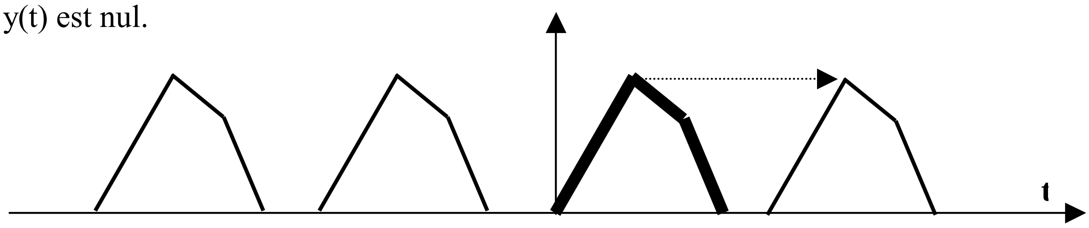
- le module et la phase (Approche d'électronicien rappelant le diagramme de Bode)

- la partie réelle et imaginaire d'un coefficient complexe.

Si l'on connaît pour chaque fréquence d'harmonique le couple de valeurs (dans l'une quelconque des variantes), on peut reconstituer le signal temporel (voir par exemple http://www.cem2.univ-montp2.fr/~moreau/jFourier/).

Nota : analyse du son d'un instrument de musique : le fondamental est la note (la[440 Hz] , si[494Hz], do ...), et les harmoniques perceptibles donne le "timbre", ce qui permet de distinguer la trompette du violon !

Il est équivalent de décrire le signal par les valeurs qu'il prend à chaque instant t, ou de décrire le signal comme la somme de composantes sinusoidales et/ou cosinusoïdales de telle ou telle amplitude aux fréquences multiples (représentation fréquentielle ou représentation de Fourier).
Lorsque le signal y(t) à analyser **n'est pas périodique** , on peut considérer le signal dérivé périodique yp(t) constitué en répétant le signal x(t) avec une période T , ceci en supposant qu'il existe un domaine borné de t inférieur à T ou y(t) est digne d'intérêt, mais qu'en dehors de ce domaine y(t) est nul.



Décomposition du signal périodisé yp(t)

Rappel : On calcule les amplitudes des composantes grâce aux formules de décomposition en série: (Période $T = 2\pi/\Omega$)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T yp(t)\cos(k\,\Omega\,t)\,dt \quad [\text{ pour } k=0;\text{ remplacer } 2/T \text{ par } 1/T]$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T yp(t)\sin(k\,\Omega\,t)\,dt$$

La synthèse (reconstitution du signal) : $yp(t) = \Sigma\,(a_k \cos(k\Omega t)+b_k\sin(k\Omega t))$ [pour $k = 0..\infty$]

Décomposition du signal périodisé en notation physique (amplitude et phase)

Variante : On peut utiliser un autre développement et trouver les coefficients par identification de l'harmonique de rang k à partir des formules précédentes de synthèse de yp(t):

$$yp(t) = \Sigma\, d_k \cos(k\Omega t - \phi_k) \quad [\text{ pour } k = 0..\infty]$$

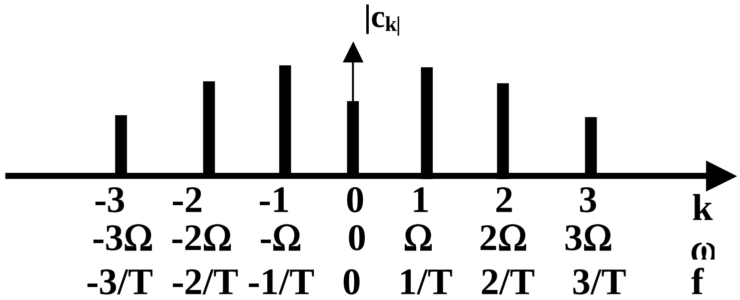
Décomposition du signal périodisé en notation complexe (réel et imaginaire)

Autre variante : On considère ici des harmoniques négatifs et des coefficients complexes

$$c_k = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} yp(t) \exp(-j\,k\,\Omega\,t)\,dt$$

synthèse : $yp(t) = \Sigma\, c_k \exp(j\,k\Omega t)$ [pour $k = -\infty..\infty$]

Les raies c(k) peuvent être portées (pour leur partir réelle, et/ou imaginaires et/ou modules ...) en tant qu'ordonnées sur un graphique, dont l'abscisse peut être gradué en k, mais aussi en $\omega=k*\Omega$ ou encore f=k/T. (Ω : pulsation du fondamental ou du signal yp(t) périodisé.

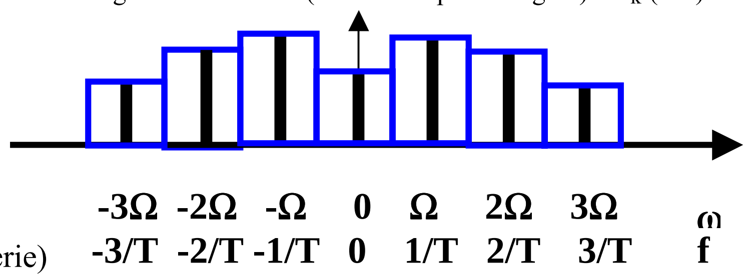


La série de Fourier devient Transformée de Fourier quand:

Valeurs des ordonnées deviennent aires des rectangles et T-> infini

On peut **remplacer** la représentation en raies par une représentation en rectangle dont l'aire, et non plus la hauteur, est l'amplitude de la raie. Les rectangles pour être jointifs auraient comme largeur : 1 (graduations en k) ou delta_f = 1/T (graduations en f), ou encore delta_omega=Omega/(2*Pi). Ces rectangles seraient centrés (abscisses) sur k=0,1,2... ou f=0,1/T,2/T... ou omega=0,(Omega/(2*Pi),2*Omega/(2*Pi)...[T = Période du signal périodisé, Omega : pulsation = 2*Pi/T]

La hauteur (l'ordonnée) des rectangles devient donc (en divisant par la largeur) = $c_k/(1/T)$



spectre de raies (série)

- > transformée (rectangles de largeur tendant vers 0, si T -> ∞)

La synthèse (reconstitution du signal à partir des coefficients) devient :

Si l'on revient au signal non périodique en faisant tendre la période vers l'infini donc Ω vers zéro, et $\Delta\omega=1/T$ vers $d\omega$ =largeur des rectangles= intervalle élémentaire, la courbe constituée des rectangles devient une courbe continue, la fonction $Yp(\omega)$ devient $Y(\omega)$=transformée de Fourier de y(t).

La synthèse = transformée inverse de Fourier .

VIII Convolution

VIII.A Définition

La convolution de deux signaux y1(t) et y2(t), opération notée : y1(t) ⊗ y2(t) engendre un nouveau signal y(t) tel que :

$$y(t) = y1(t) \otimes y2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y1(u)\, y2(t-u)\, du$$

Application au système linéaire : Si y1(t) est le signal à l'entrée d'un système linéaire, y2(t) la réponse impulsionelle du système (réponse du système lorsqu'on lui injecte une impulsion de Dirac), y(t) est le signal à la sortie du système (identique à l'analyse des systèmes linéaires faite avec la transformée de Laplace).

VIII.B Théorèmes de la convolution :

Si l'on connaît les transformées de Fourier Y1(ω) et Y2(ω) des signaux y1(t) et y2(t), alors :

$y1(t) \otimes y2(t) \Leftrightarrow Y1(\omega) \times Y2(\omega)$ convolution temporelle, et réciproquement :

$y1(t) \times y2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} Y1(\omega) \otimes Y2(\omega)$ convolution fréquentielle.

IX Corrélation et Densité spectrale d'énergie

IX.A Corrélation de deux signaux :

Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux signaux réels. On définit l'intercorrélation $r_{12}(\tau)$ de ces deux signaux :

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y1(t)\, y2(t-\tau)\, dt$$

Attention ≠ convolution (variables interchangées)

Mais convolution = corrélation avec l'un des signaux symétrisé dans le temps.

L'amplitude de $r_{12}(\tau)$ mesure le degré de **ressemblance** de $y_1(t)$ et $y_2(t-\tau)$ [$y_2(t)$ retardé de τ]. En effet, si les facteurs $y_1(t)$ et $y_2(t-\tau)$ sont plutôt (= pour la plupart des valeurs de t) de même signe et de valeurs similaires, les produits seront positifs et plutôt importants, la somme des produits que constitue la corrélation sera importante. C'est le moyen calculatoire classique pour évaluer une ressemblance.

Nota: On réalise matériellement des corrélateurs, vu l'intérêt de cette fonction pour reconnaître un signal au milieu de bruit par exemple.

On définit aussi la **fonction d'autocorrélation** = intercorrélation du signal avec lui-même retardé:

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, y(t-\tau)\, du$$

On peut démontrer que si le signal est réel, l'auto-corrélation est réelle et de symétrie paire.

Si un signal se reproduit approximativement au bout d'un temps T (signal presque périodique), la fonction r(τ) présentera un maximum pour τ=T, et plus généralement τ=n T. Ceci est utilisé par les corrélateurs pour calculer la période T (par exemple en téléphonie mobile GSM) en évaluant l'autocorrélation pour toutes les valeurs de τ , la plus grande autocorrélation correspond à T = τ.

IX.A.1 Propriétés des fonctions de corrélation :

$r12(\tau) = r21(-\tau)$ (intercorrélation)

$r(\tau) = r(-\tau)$ (autocorrélation : fonction paire)

$$r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2\,dt = E$$ = Puissance normalisée du signal intégrée = Energie du signal

dont l'unité est le carré de l'unité du signal*temps

IX.B Densité spectrale d'énergie

Si r(τ) est la fonction d'autocorrélation, on peut définir sa transformée de Fourier (τ étant en général un temps) :

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\exp(-j\,\omega\,\tau)\,d\tau$$

Ce spectre est appelé **densité spectrale d'énergie** du signal y(t), il traduit la répartition en fréquences de l'énergie portée par le signal y(t).

Par exemple, un filtre passe-haut en supprimant dans le signal la partie basse fréquence, génèrera un signal d'énergie diminuée si la densité spectrale d'énergie originale était forte du côté des basses fréquences.

Réciproquement, à partir de la densité spectrale d'énergie R(ω), on peut calculer la fonction d'auto-corrélation :

$$r(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\exp(j\,\omega\,\tau)\,d\omega$$ (transformée inverse de la densité spectrale d'énergie)

Et si le signal est réel, on peut démontrer : $R(\omega) = \text{Fourier}(r(\tau)) = |Y(\omega)|^2 = [\text{Fourier}(y(t))]^2$

Démonstration : $\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)*y(t-u)*du\,]*\exp(-j\omega t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u)*\exp(-j\omega t)\,dt\,]*du = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)*Y(\omega)*\exp(-j\omega u)*du)$$

Et pour τ =0, $r(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\exp(0)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\exp(0)\,d\omega$

L'énergie a donc pour expression : $E = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\,d\omega$. Ceci explique la dénomination de densité spectrale d'énergie pour R(ω).

Cette dernière relation est connue sous le nom de **Théorème de Parseval** relatif à la transformée de Fourier.

IX.C Puissance d'un signal et autocorrélation

Si le signal est à puissance moyenne non nulle (et énergie infinie), on peut définir et calculer fonction d'autocorrélation sur une durée T qui tend vers l'infini (analogue à une moyenne temporelle).

$$r(\tau) = \lim (T\text{->}\infty) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)\ y(t-\tau)\ dt$$

Notons que pour $\tau = 0$, $r(0) = \lim (T\text{->}\infty) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)^2\ dt$ = Puissance (moyenne) du signal y(t)

Notons aussi que si le signal est périodique, on calcule l'intégrale sur une période:

$$r(0)= P = \frac{1}{To} \int_{-To/2}^{To/2} y(t)\ y(t-\tau)\ dt$$

IX.D Densité spectrale de puissance d'un signal

On calcule la densité spectrale de puissance = puissance par élément dω du spectre = dP/dω =

$$S(\omega) = \text{Fourier}(r(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)*\exp(-j\omega\ \tau)*\ d\ \tau$$

$$P = \lim (T\text{->}\infty) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)^2\ dt\ )) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\ d\omega$$

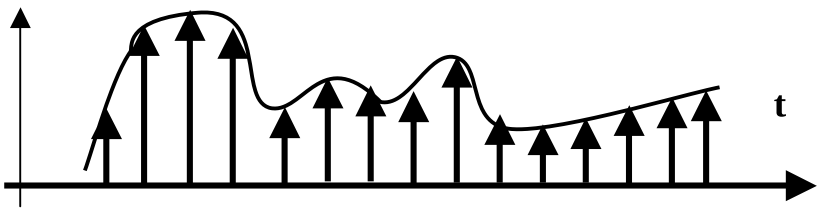
Elle s'exprime en unité de y(t) au carré par unité de fréquence : V^2 /Hz souvent.

On utilise beaucoup la densité spectrale de puissance en télécommunications : Les spectres donnés sont en général des spectres de puissance : S(f) en fonction de f.

X Signal échantillonné

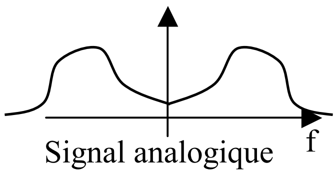
La tendance au tout numérique renforce l'importance de l'analyse des signaux échantillonnés.

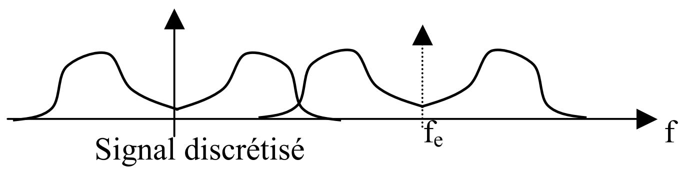
On peut considérer les échantillons successifs d'un signal y(t) analogique comme une suite d'impulsions de Dirac d'aires proportionnelles aux valeurs du signal aux instants n*Te (n entier), Te: période d'échantillonnage.



On peut démontrer que le spectre du signal échantillonné est une périodisation du spectre.

Si le signal est réel (cas usuel), le spectre d'amplitude est pair. Chaque composante à la fréquence négative $-f_k$ sera reproduite à la fréquence $n/Te - f_k$. C'est le phénomène de "réplication".


f
Signal analogique


Signal discrétisé
f_e
f